

בית"ס למדעי המחשב ומתמטיקה. תשנ"ט. 09.04.99
מפגים אלגוריתם. סמסטר א', מועד ב'.
שם המרצה: ד"ר מ. מוזיצ'ווק.
מועד המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק דף נוסחאות אחד מגודל A4. אסור להשתמש בכל
סוגים של מחשבוניש.

חלק א': בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת
מהשאלות.

15 נקודות

יהי K שדה כלשהו. נגדיר מעל הקבוצה $G = \{(a,b) \mid a \in K^*, b \in K\}$ פעולה בינרית עיי
הנוסחה:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad + b)$$

הוכח ש- G תהיה חבורה ביחס לפעולה הנ"ל.

15 נקודות

תהי $H \leq G$ תת-חבורה כלשהי של חבורה G . הוכח ש:

- א. לכל $g_1 \in G, g_2 \in G$ מתקיים $(g_1 H = g_2 H) \vee (g_1 H \cap g_2 H = \emptyset)$.
ב. אם H חבורה סופית, אז כל קוסט ימני מכיל $|H|$ איברים בדיוק.

20 נקודות

יהי R תחום שלמות כלשהו. לכל $r \in R$ נגדיר פונקציה $f_r: R \rightarrow R$ עיי הנוסחה
 $f_r(x) = rx$. הוכח ש:

א. לכל $r \in R, r \neq 0$ פונקציה f_r חד-חד-ערכית.

ב. הוכח שאם R סופי אז R שדה.

רמז: אם A קבוצה סופית, אז כל פונקציה חד-חד-ערכית $\phi: A \rightarrow A$ היא
פונקציה על.

(2)

חלק ב': בחלק זה יש לבחור 5 מתוך 6 שאלות.

4. 10 נקודות.

תהי $S = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ קבוצה של תמורות מ- S_4 . אשר או סתור:

$i \notin S$
לגבי קבוצת

לא	כן	
✓		א. S תת-חבורה של S_4 .
✓		ב. S קוסט ימני (מחלקה ימנית) של תת-חבורה של S_4 .
	✓	ג. S תת-קבוצה של A_4 .
✓		ד. S סגורה כלפי כפל תמורות

$(12)(34)(13)(24) = i \notin S$

5. 10 נקודות.

יהי R תחום שלמות כלשהו, אז:

2

לא	כן	
✓		א. אם r מחלק את s וגם s מחלק את r (כך r, s שני איברי R של אטונים נ-0) אז $r = \pm s$.
	✓	ב. אם המכפלה rs של שני האיברים $r, s \in R$ היא איבר הפיך אז כל אחד מהאיברים r, s גם איבר הפיך.
✓		ג. אם לכל $r \in R, r \neq 0$ ולכל שני איברים $x, y \in R$ השוויון $rx = ry$ מתקיים אם ורק אם $x = y$ אז R שדה.
	✓	ד. אם $r, s \in R$ איברים הפיכים אז גם rs הפיך

6. 10 נקודות.

נתונה מערכת משוואות לינאריות שהמקדמים שלה שייכים לשדה Z_5 :

לכ"ז
כ"ק
כ"ג
כ"ד
כ"ה
כ"ו
כ"ז
כ"ח
כ"ט

$$\begin{cases} x+y+z = -2 \\ x+2y+z = 2 \\ 2x+y-z = 1 \\ x+y-z = -1 \end{cases}$$

אזי

- א. לממ"ל יש פתרון כללי אם 2 משתנים חופשיים.
- ב. לממ"ל יש פתרון כללי אם 3 משתנים חופשיים.
- ג. לממ"ל יש פתרון כללי אם משתנה חופשי אחד.
- ד. לממ"ל יש פתרון יחיד.
- ה. לממ"ל אין פתרון.

(3)

10.7 נקודות.

שתי תמורות של הקבוצה $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות

הטאות: $f = (1,2,3,0,6)$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 2 \\ 5x+1, & x=2 \end{cases}$ (הפעולות מתבצעות ב- Z_7).

(15264)	א. חשב את $f^2 g^{-1}$:
(15264)	ב. פרק את $f^2 g^{-1}$ למכפלה של מחזורים זרים:
5	ב. מצא סדר של $f^2 g^{-1}$:
$(14)(16)(18)(15)$	ג. פרק את $f^2 g^{-1}$ למכפלה של חילופים:

10.8 נקודות.

היחסים בין הפולינומים הבאים:

$a(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 - x + 1 \in Z_5[x]$, $b(x) = x^3 - x^2 + x + 4 \in Z_5[x]$

$\gcd(a(x), b(x)) = 4x^2 - 2x - 2$

10.9 נקודות.

תהי G תת-חבורה ציקלית של S_5 הנוצרת ע"י התמורה $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ אזי

א. $[S_5 : G] = 15$

ב. $[S_5 : G] = 24$

ג. $[S_5 : G] = 18$

ד. $[S_5 : G] = 20$

ה. אף אחת מהתשובות הנותרות איננה מתאימה.

בהצלחה!